Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	**1 point** pour une bonne réponse **0 point** pour aucune réponse ou une réponse ambigüe : réponse multiple, case raturée ou encadrée au lieu de noircie **- 0,25 point** pour une réponse fausse Note finale /30
Durée	1h30
Calculette autorisée	*NON*
Consignes pour les candidats	*Merci de ne rien marquer sur le sujet* *Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible* *Répondez sur la grille séparée* *Seules les grilles correctement remplies seront corrigées*
Consignes à l'attention des correcteurs	1. Chaque partie A et B est notée séparément 2. Note minimale pour une partie = 0 : pas de note négative 3. Note finale **sur 30** = Note Partie A + Note Partie B

Thématiques couvertes par l'épreuve

Outils de base
- Trigonométrie
- Inégalités dans $\mathbb{R}$
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

Algèbre linéaire
- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle
- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

Epreuve écrite de Mathématiques

Durée : 1 heure 30 minutes

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions sont dépendantes. Le sujet comporte deux niveaux de questions :

1. *des questions d' applications du cours : 1-3-5-8-10-15-16-17-18-20-25-28-29-30 – Partie A*
2. *des questions nécessitant plus de réflexion : 2-4-6-7-9-11-12-13-14-19-21-22-23-24-26-27 – Partie B*

Section I

Dans les questions 1) à 9), on considère sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante d'inconnue u :

$$t^2u'' + (4t - 4t^2)u' + (2 - 8t + 4t^2)u = 18\,e^{-t}, \qquad \text{notée } (\mathrm{E_u}).$$

Soit la fonction annexe $t \longmapsto v(t) = t^2u(t)$, définie sur I.

1) La fonction v est deux fois dérivable sur I et :
   A) $u'' = 6t^{-4}v - 2t^{-3}v' + t^{-2}v''$,
   B) $u'' = t^{-4}v - t^{-3}v' + t^{-2}v''$,
   C) $u'' = 6t^{-4}v - 4t^{-3}v' + t^{-2}v''$,
   D) $u'' = 3t^{-4}v - 4t^{-3}v' + t^{-2}v''$.

2) La fonction v vérifie sur I l'équation différentielle notée $(\mathrm{E_v})$:
   A) $v'' - 4v' + 4v = 18\,e^{-t}$,
   B) $v'' + 4v' + 4v = 18\,e^{-t}$,
   C) $v'' - 4v' + 5v = 18\,e^{-t}$,
   D) $v'' + 4v' + 5v = 18\,e^{-t}$.

3) Soit $(\mathrm{H_v})$ l'équation différentielle définie à partir de $(\mathrm{E_v})$ en remplaçant $18\,e^{-t}$ par 0. La solution générale de $(\mathrm{H_v})$ est, avec a et b réels :
   A) $v = (at + b)\,e^{-2t}$,
   B) $v = at\,e^{2t}$,
   C) $v = b\,e^{-2t}$,
   D) $v = (at + b)\,e^{2t}$.

4) Sur I, l'équation différentielle $(\mathrm{E_v})$ a pour solution particulière la fonction v_p telle que :
   A) $v_p(t) = 2t\,e^{-t}$,
   B) $v_p(t) = 2t\,e^{2t}$,
   C) $v_p(t) = 2\,e^{2t}$,
   D) $v_p(t) = 2\,e^{-t}$.

5) Soit μ un réel. Pour t au voisinage de 0, on vérifie :
   A) $e^{\mu t} = 1 + t + \frac{1}{2}\mu^2t^2 + o(t^2)$,
   B) $e^{\mu t} = 1 + \mu t + \frac{1}{2}\mu^2t^2 + o(t^2)$,
   C) $e^{\mu t} = 1 - \mu t - \frac{1}{2}\mu^2t^2 + o(t^2)$,
   D) $e^{\mu t} = 1 - t - \frac{1}{2}\mu^2t^2 + o(t^2)$.

6) Soit v la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{E_v})$. Un développement limité à l'ordre 2 de v en 0^+ est alors, avec a et b réels :
   A) $v(t) = (b + 2) + (2b + a - 2)t + (2b + 2a + 1)t^2 + o(t^2)$,
   B) $v(t) = (b + 2) + (2b - a + 2)t + (2b - 2a - 1)t^2 + o(t^2)$,
   C) $v(t) = (b - 2) + (2b + a + 2)t + (2b + 2a - 1)t^2 + o(t^2)$,
   D) $v(t) = (b - 2) + (2b - a - 2)t + (2b - 2a + 1)t^2 + o(t^2)$.

7) La fonction u, solution de $(\mathrm{E_u})$ sur I, possède une limite réelle en 0^+, notée l, si et seulement si :
   A) $a = 4$ et $b = -2$,
   B) $a = 4$ et $b = 2$,
   C) $a = 6$ et $b = 2$,
   D) $a = 6$ et $b = -2$.

8) Lorsque la fonction u, solution de $(\mathrm{E_u})$ sur I, possède une limite réelle en 0^+, cette limite l vaut :
   A) 17,
   B) 13,
   C) 9,
   D) 5.

9) Lorsque t tend vers $+\infty$, un équivalent de u est alors :
   A) $-\frac{2}{t^2}\,e^{2t}$,
   B) $\frac{6}{t}\,e^{2t}$,
   C) $\frac{2}{t^2}\,e^{-2t}$,
   D) $-\frac{6}{t}\,e^{-2t}$.

Section II

Dans les questions 10) à 14), on considère, pour $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto f_m(t) = \frac{e^t}{t^m}$. L'étude de la fonction f_m est menée sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$.

10) La fonction f_m est dérivable sur I. Pour tout t de I, on a :
   A) $f_m'(t) = t^{-m}e^t(t-m)$,
   B) $f_m'(t) = -t^{-m}e^t(t-m)$,
   C) $f_m'(t) = -t^{-m-1}e^t(t-m)$,
   D) $f_m'(t) = t^{-m-1}e^t(t-m)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on définit les intégrales :
- $I_n = \int_n^{n+1} f_1(t)dt$,
- $J_n = \int_n^{n+1} f_2(t)dt$.

11) Les quantités I_n et J_n vérifient :
   A) $\frac{e^{n+1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^n}{n}$ et $\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} \leq J_n \leq \frac{e^n}{n^2}$,
   B) $\frac{e^n}{n} \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$ et $\frac{e^n}{n^2} \leq J_n \leq \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}$,
   C) $\frac{e^{n+1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n}$ et $\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} \leq J_n \leq \frac{e^{n+1}}{n^2}$,
   D) $\frac{e^n}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^n}{n}$ et $\frac{e^n}{(n+1)^2} \leq J_n \leq \frac{e^n}{n^2}$.

12) On en déduit l'encadrement :
   A) $0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{n-1}{n^2}$,
   B) $0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{n+1}{en^2}$,
   C) $0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{en}{(n+1)^2}$,
   D) $0 \leq \frac{J_n}{I_n} \leq \frac{n}{(n+1)^2}$.

13) Par intégration par parties, on établit la relation :
   A) $I_n = \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{e^n}{n^2} + J_n$,
   B) $I_n = \frac{e^n}{n^2} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + J_n$,
   C) $I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^n}{n} + J_n$,
   D) $I_n = \frac{e^n}{n} - \frac{e^{n+1}}{n+1} + J_n$.

14) Lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de I_n est alors :
   A) $\frac{e^n}{n}(e-1)$,
   B) $\frac{e^n}{2n}(e-1)$,
   C) $\frac{e^{n+1}}{n}(e-1)$,
   D) $\frac{e^{n+1}}{n}(e^2-1)$.

Section III

Dans les questions 15) à 30), on considère :

- un espace vectoriel *E* muni d'une base $B_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$,
- les applications linéaires f, $f_1 = f - id$, $f_2 = f - 2\,id$, de *E* dans *E*, représentées dans la base B_0 par les matrices respectives A, A_1 et A_2,
- la matrice I, matrice identité de dimension 3,
- la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

15) Le vecteur $f(\overrightarrow{e_2})$ vaut :
A) $3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_3}$,
B) $2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_3}$,
C) $-2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_3}$,
D) $-2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}$.

16) Soient les vecteurs $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} = f(\vec{u})$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base B_0. Alors la quantité v_2 vaut :
A) $-2u_1 - 2u_3$,
B) $-2u_1 + 3u_3$,
C) $2u_1 - 2u_3$,
D) $3u_1 - 2u_3$.

17) La matrice A_2 vaut :
A) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$,
B) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$,
C) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,
D) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

18) On a respectivement :
A) ${A_1}^2 = A_1$ et ${A_2}^2 = -A_2$,
B) ${A_1}^2 = A_1$ et ${A_2}^2 = A_2$,
C) ${A_1}^2 = -A_1$ et ${A_2}^2 = A_2$,
D) ${A_1}^2 = -A_1$ et ${A_2}^2 = -A_2$.

19) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On a respectivement :
A) ${A_1}^n = A_1$ et ${A_2}^n = A_2$,
B) ${A_1}^n = A_1$ et ${A_2}^n = (-1)^n A_2$,
C) ${A_1}^n = A_1$ et ${A_2}^n = (-1)^{n+1} A_2$,
D) ${A_1}^n = -A_1$ et ${A_2}^n = -A_2$.

20) Le déterminant de la matrice *A* vaut :
A) 2,
B) 4,
C) 6,
D) 8.

21) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n a pour expression :
A) $I + (2^n - 1)A_1$,
B) $I + (3^n - 2)A_1$,
C) $(2^n - 1)I + A_1$,
D) $(3^n - 2)I + A_1$.

22) Soit P_A le polynôme caractéristique de la matrice *A*, défini par $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$. La quantité $P_A(\lambda)$ a pour expression :
A) $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$,
B) $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,
C) $(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$,
D) $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$.

23) La quantité $P_A(\lambda)$ a pour expression :
A) $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$,
B) $(2-\lambda)^3$,
C) $(2-\lambda)(\lambda-1)\lambda$,
D) $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

24) Le noyau de f_1 est noté $Ker(f_1)$. Il est égal à :
A) $Vect\{(0,-1,1)\}$,
B) $Vect\{(1,1,1)\}$,
C) $Vect\{(0,-1,1),(2,2,1)\}$,
D) $Vect\{(1,1,1),(2,2,1)\}$.

25) Le rang de f_1 vaut :
A) 0,
B) 1,
C) 2,
D) 3.

26) $Ker(f_2)$ est égal à :
A) $Vect\{(1,1,1)\}$,
B) $Vect\{(0,-1,1),(2,2,1)\}$,
C) $Vect\{(1,1,1),(2,2,1)\}$,
D) $Vect\{(0,-1,1)\}$.

27) L'image de f_2 est notée $Im(f_2)$. Elle est égale à :
   A) $Vect\{(1,1,1)\}$,
   B) $Vect\{(0,-1,1),(2,2,1)\}$,
   C) $Vect\{(1,1,1),(2,2,1)\}$,
   D) $Vect\{(0,-1,1)\}$.

28) La matrice A est diagonalisable :
   A) dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{C}$,
   B) dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$,
   C) ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$,
   D) dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Si la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, alors on note D une matrice semblable à A, et P la matrice de passage de la base B_0 à la base propre associée à *D*.

29) La relation suivante est alors vérifiée :
   A) $A = P.D.P^{-1}$,
   B) $A = P^{-1}.D.P$,
   C) $A = P^{-1}.D.P^{-1}$,
   D) $A = P.D.P$.

30) Dans l'écriture de la question précédente :
   A) Une permutation circulaire des colonnes de *P* est possible sans modifier *D*,
   B) Une permutation des termes diagonaux distincts de *D* est possible sans modifier les colonnes de *P*,
   C) Une permutation des termes diagonaux de *D* s'accompagne d'une permutation des colonnes de *P*,
   D) Les matrices *D* et *P* sont uniques.

Nom et Prénom

……

Réponses aux questions d'applications directes PARTIE A	Réponses aux questions avancées PARTIE B
Question 1 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 2 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 3 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 4 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 5 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 6 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 7 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 8 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 9 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 10 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 11 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 12 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 13 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 14 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 15 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Question 16 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Question 17 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Question 18 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 19 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 20 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 21 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 22 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 23 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 24 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 25 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
	Question 26 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
	Question 27 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 28 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Question 29 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Question 30 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	
Note Partie A (/14) :	**Note Partie B (/16) :**
Note Finale (/30) :	